

ANÁLISE ESTRUTURAL DE TRELIÇA PLANA UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Vagner Nunes da Cruz¹, Daniel Almeida Colombo², Camila Fogaça de Oliveira³ e Luciano Barbosa*

RESUMO

A análise de estruturas como treliças planas é fundamental na engenharia, porém, métodos analíticos tradicionais, como o Método dos Nós, podem ser trabalhosos e suscetíveis a erros em sistemas complexos. Este trabalho teve como objetivo geral aplicar o Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise estática de uma treliça plana, avaliando esforços internos, deslocamentos e reações de apoio, a fim de comparar os resultados com métodos analíticos clássicos e validar a abordagem numérica. A metodologia foi estruturada em duas etapas principais: primeiramente, foi realizada a análise teórica da treliça utilizando o Método dos Nós para calcular manualmente os esforços, considerando carregamentos permanentes e de vento conforme normas técnicas. Posteriormente, um modelo computacional da mesma estrutura foi desenvolvido e implementado por meio de um script no software MATLAB, utilizando o Método da Rigidez Direta (MEF). Os resultados obtidos, incluindo esforços axiais, tensões, reações de apoio e deslocamentos, demonstraram uma excelente concordância entre a simulação computacional e os cálculos manuais, validando a precisão do modelo. A abordagem numérica demonstrou vantagens significativas em eficiência, velocidade e na capacidade de fornecer resultados abrangentes, como a flecha máxima, que são limitados no método analítico. Conclui-se que o MEF implementado em MATLAB é uma ferramenta precisa e confiável para a análise estrutural, permitindo o dimensionamento seguro, a verificação do coeficiente de segurança e a otimização de projetos.

Palavras-chave: método dos elementos finitos; treliça plana; Matlab.

* Autor correspondente (e-mail): luciano.barbosa@sistemafiep.org.br

STRUCTURAL ANALYSIS OF A PLANE TRUSS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

ABSTRACT

The analysis of structures such as plane trusses is fundamental in engineering; however, traditional analytical methods, like the Method of Joints, can be laborious and susceptible to errors in complex systems. This work had the general objective of applying the Finite Element Method (FEM) to the static analysis of a plane truss, evaluating internal forces, displacements, and support reactions, in order to compare the results with classical analytical methods and validate the numerical approach. The methodology was structured in two main stages: first, a theoretical analysis of the truss was performed using the Method of Joints to manually calculate the forces, considering permanent and wind loads according to technical standards. Subsequently, a computational model of the same structure was developed and implemented through a script in MATLAB software, using the Direct Stiffness Method (FEM). The obtained results, including axial forces, stresses, support reactions, and displacements, showed excellent agreement between the computational simulation and the manual calculations, validating the model's accuracy. The numerical approach demonstrated significant advantages in efficiency, speed, and the ability to provide comprehensive results, such as maximum deflection, which are limited in the analytical method. It is concluded that FEM implemented in MATLAB is a precise and reliable tool for structural analysis, enabling safe design, verification of the safety factor, and project optimization.

Key words: finite element method; plane truss; Matlab.

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural tem como objetivo compreender e prever o comportamento de estruturas submetidas a diferentes carregamentos, garantindo segurança, estabilidade e eficiência. Com o avanço das técnicas de cálculo e das ferramentas computacionais, métodos numéricos passaram a desempenhar papel central na engenharia estrutural, ampliando a capacidade de análise de sistemas cada vez mais complexos. Nesse contexto, as treliças planas destacam-se por sua ampla aplicação em pontes, coberturas, torres e estruturas mecânicas, além de constituírem um modelo didático fundamental para o estudo do equilíbrio estrutural.

Segundo Hibbeler (2005), a análise de treliças baseia-se na determinação das forças internas a partir das equações fundamentais da estática, sendo o método dos nós um dos procedimentos clássicos mais utilizados para identificar esforços de tração e compressão em cada barra. Essa formulação parte da idealização da estrutura como um conjunto de elementos submetidos exclusivamente a esforços axiais, hipótese que fundamenta tanto os métodos analíticos tradicionais quanto o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF).

Conforme Beer e Johnston (2010), a correta aplicação das leis de Newton e dos diagramas de corpo livre é essencial para a análise estrutural, servindo de base para métodos analíticos e numéricos. Entretanto, como destacam Cunha et al. (2007), os métodos clássicos tornam-se pouco eficientes quando aplicados a estruturas com grande número de barras ou geometrias complexas, o que limita sua utilização prática.

Diante dessas limitações, o Método dos Elementos Finitos consolidou-se como uma alternativa eficiente e versátil, baseada na discretização do domínio estrutural em elementos interconectados por nós, permitindo a solução computacional de problemas complexos com boa precisão (Cunha et al., 2007). Além disso, o avanço de softwares especializados, como ANSYS®, ABAQUS® e MATLAB®, tornou a análise numérica mais acessível e confiável, possibilitando a obtenção consistente de deslocamentos, esforços e tensões (Cardoso & Costa, 2022).

Nesse contexto, este trabalho aplica o Método dos Elementos Finitos na análise estática de uma treliça plana, comparando os resultados numéricos com aqueles obtidos pelo método analítico dos nós, com o objetivo de validar o modelo computacional e evidenciar as vantagens do MEF em termos de eficiência, rapidez e abrangência de resultados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Método dos elementos finitos (MEF)

De acordo com Rade (2005), o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica utilizada para obter soluções aproximadas de problemas definidos por equações diferenciais, especialmente quando métodos analíticos se tornam inviáveis. O método baseia-se na discretização de um domínio contínuo em elementos finitos interconectados por nós, nos quais as variáveis são aproximadas por funções de forma. Inicialmente aplicado à análise estrutural, o MEF expandiu-se para diversas áreas da engenharia, destacando-se pela flexibilidade e eficiência, sendo amplamente implementado em softwares como ANSYS®, NASTRAN® e ABAQUS®. Contudo, por se tratar de uma aproximação do sistema físico real, sua aplicação exige fundamentação teórica adequada e cuidados na discretização, a fim de garantir resultados confiáveis.

Além de sua concepção conceitual, o MEF baseia-se em formulações matemáticas matriciais que permitem descrever o comportamento da estrutura a partir de suas propriedades geométricas e físicas. A equação fundamental do método pode ser expressa como:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (1)$$

onde:

$[K]$ é a matriz de rigidez global do sistema;

$\{d\}$ é o vetor de deslocamentos nodais;

$\{F\}$ representa o vetor de forças nodais aplicadas.

Essa relação estabelece o equilíbrio entre as forças internas e externas atuantes na estrutura, de modo que o deslocamento em cada nó é função direta das propriedades dos elementos finitos que o compõem.

A matriz de rigidez de cada elemento ($[k^e]$) é obtida pela integração das relações constitutivas e geométricas do material, de acordo com:

$$[k^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad (2)$$

em que:

$[B]$ é a matriz que relaciona deformações com deslocamentos (matriz de deformação),

$[D]$ é a matriz constitutiva do material (lei de Hooke generalizada), e

V^e é o volume do elemento finito.

Após o cálculo da rigidez de cada elemento, o modelo global é montado por meio do processo de agregação, somando-se as contribuições de todos os elementos e obtendo-se o sistema completo $[K]\{d\} = \{F\}$. A solução desse sistema fornece os deslocamentos nodais, que permitem determinar tensões, esforços internos e reações de apoio.

Segundo Rade (2005), o Método dos Elementos Finitos destaca-se pela capacidade de analisar geometrias complexas, diferentes condições de contorno e materiais não homogêneos, desde que a discretização e os parâmetros do modelo sejam adequadamente definidos. Assim, o MEF consolidou-se como uma ferramenta fundamental da engenharia contemporânea, permitindo a análise rigorosa e confiável do comportamento estrutural sob diversos tipos de carregamento.

2.1.1 Critério de Falha e Coeficiente de Segurança

A obtenção dos esforços e tensões nos elementos por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), torna-se essencial verificar se a estrutura analisada é capaz de resistir às solicitações impostas sem atingir o limite de escoamento do material. Essa verificação é realizada por meio dos critérios de falha, que comparam as tensões atuantes na estrutura com as propriedades resistentes do material.

Rade (2005) menciona que, o critério adotado é o da tensão máxima ou escoamento do material, amplamente utilizado em componentes metálicos submetidos a esforços predominantemente axiais. Esse critério estabelece que o material permanecerá em regime elástico enquanto a tensão máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$ observada for inferior à tensão de escoamento σ_y (ou f_y) do aço. Assim, o estado limite de falha pode ser definido como:

$$\sigma_{m\acute{a}x} \leq \sigma_y \quad (3)$$

Caso essa condição não seja satisfeita, considera-se que o material entrou em regime plástico, indicando falha por escoamento. Para complementar essa avaliação, é comum utilizar o coeficiente de segurança (CS), que representa a margem entre a resistência do material e a tensão efetivamente solicitante. O CS é obtido pela relação:

$$CS = \frac{\sigma_y}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (4)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento do material e $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a tensão máxima atuante na estrutura.

Conforme ABNT 8800 (2008) Valores de *CS* entre 1,5 e 3,0 são geralmente considerados adequados em estruturas metálicas, indicando equilíbrio entre segurança e economia. Valores inferiores a 2,0 apontam subdimensionamento, enquanto valores muito elevados ($CS > 3,0$) podem indicar superdimensionamento, implicando uso excessivo de material e custo elevado.

2.2 Critério de análise de treliças planas e modelagem matemática

A modelagem matemática de treliças planas é fundamental para a compreensão do comportamento estrutural de sistemas formados por barras interligadas, permitindo a determinação dos esforços internos e contribuindo para o correto dimensionamento e a verificação da segurança estrutural. Além disso, o estudo das treliças planas fornece a base conceitual para o desenvolvimento de métodos analíticos e numéricos aplicados à engenharia civil e mecânica, destacando-se pela simplicidade geométrica e relevância prática.

De acordo com Viero (2011), a treliça é um elemento estrutural geometricamente indeformável, constituído por um conjunto de barras retilíneas de pequena seção, dispostas em forma triangular e articuladas em suas extremidades. Essa configuração confere estabilidade e rigidez ao sistema, desde que sejam desprezadas as pequenas deformações elásticas das barras.

Uma treliça é uma estrutura formada por barras retilíneas conectadas exclusivamente em suas extremidades, amplamente utilizada em pontes, coberturas, guindastes e sistemas mecânicos. Uma treliça é classificada como plana quando todos os seus elementos estão contidos em um único plano. Sua rigidez estrutural é garantida pelo emprego do triângulo como unidade básica, uma vez que essa geometria é estaticamente estável, ao contrário de polígonos com mais lados, que requerem elementos adicionais para estabilidade. Treliças formadas pela adição sucessiva de triângulos são denominadas treliças simples.

Para a modelagem matemática de treliças planas, adotam-se algumas hipóteses simplificadoras: as barras são solicitadas apenas por esforços axiais de tração ou compressão; as cargas externas e reações de apoio atuam exclusivamente nos nós; e as conexões são modeladas como rótulas, mesmo quando fisicamente soldadas ou rebitadas, desde que haja concorrência dos eixos das barras no nó (Meriam & Kraige, 2020). O peso próprio das barras é, em geral, desprezado em relação às cargas aplicadas.

2.2.1 Método dos nós

O método dos nós, também conhecido como método das Juntas, é um processo analítico para determinar as forças axiais desconhecidas nos membros de uma treliça. O princípio fundamental do método baseia-se no fato de que, se a treliça como um todo está em equilíbrio estático, então cada um de seus nós (as conexões entre as barras) também deve estar em equilíbrio Viero (2011). Desta forma, ao satisfazer as condições de equilíbrio para as forças que atuam em cada nó, é possível determinar os esforços em toda a estrutura Meriam; Kraige, (2020).

Para a correta aplicação do método, cada nó é isolado e tratado como uma partícula. Desenha-se seu Diagrama de Corpo Livre (DCL), representando todas as forças que atuam sobre ele: forças externas, reações de apoio e as forças axiais das barras. Como cada nó é um sistema de forças coplanares e concorrentes, aplicam-se as duas equações de equilíbrio da estática para determinar as forças desconhecidas.

$$\sum (F_x = 0) \quad (4)$$

$$\sum (F_y = 0) \quad (5)$$

2.3 Modelagem para análise da treliça

Nesta seção apresentam-se as principais equações utilizadas no desenvolvimento do modelo numérico em MATLAB para a análise estática de treliças planas pelo método dos elementos finitos (MEF). As equações foram inseridas conforme norma ABNT 6123 (1988), com numeração sequencial e breve descrição.

O comprimento de cada barra foi calculado pela distância entre os nós inicial e final:

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (6)$$

onde:

L : comprimento da barra (m)

x_i, y_i : coordenadas do nó inicial da barra (m)

x_j, y_j : coordenadas do nó final da barra (m)

Essa equação calcula a distância entre dois pontos no plano, aplicando o teorema de Pitágoras.

Os cossenos e senos diretores foram determinados pelas relações:

$$C = \frac{x_j - x_i}{L} \quad (7)$$

$$S = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (8)$$

c : cosseno diretor (componente na direção x)

s : seno diretor (componente na direção y)

x_j, x_i : coordenadas em x dos nós (m)

y_j, y_i : coordenadas em y dos nós (m)

L : comprimento da barra (m)

Esses valores mostram a inclinação da barra em relação aos eixos globais. São usados para projetar forças e deslocamentos locais nos eixos globais.

A matriz de rigidez local de cada elemento é dada por:

$$K_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & -CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

K_e : matriz de rigidez do elemento (N/m)

A : área da seção transversal da barra (m²)

E : módulo de elasticidade do material (Pa = N/m²)

L : comprimento da barra (m)

C, S : cossenos e senos diretores

Essa matriz relaciona forças e deslocamentos em cada barra. É a base do Método dos Elementos Finitos (MEF).

O equilíbrio global do sistema estrutural foi representado pela equação matricial:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (10)$$

$[K]$: matriz de rigidez global da estrutura (N/m)

$\{d\}$: vetor de deslocamentos nodais (m)

$\{F\}$: vetor de forças aplicadas nos nós (N)

Essa é a equação principal do MEF: mostra que as forças aplicadas nos nós são equilibradas pelas deformações multiplicadas pela rigidez da estrutura.

A deformação unitária em cada barra foi obtida por:

$$\varepsilon = \frac{1}{L}[-c \quad -s \quad c \quad s].\{d\} \quad (11)$$

ε : deformação unitária da barra (adimensional)

L : comprimento da barra (m)

c, s : cossenos e senos diretores

$\{d\}$: vetor de deslocamentos nos nós da barra (m)

Mede a variação de comprimento relativa da barra, ou seja, o quanto ela alonga ou encurta em relação ao seu comprimento original.

Aplicando a Lei de Hooke, as tensões nas barras foram determinadas por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (12)$$

σ : tensão axial na barra (Pa ou N/m² → convertido em MPa)

E : módulo de elasticidade do material (Pa)

ε : deformação unitária (adimensional)

Essa é a lei de Hooke. Ela liga a deformação à tensão, mostrando como o material responde elasticamente aos esforços.

Por fim, o coeficiente de segurança (CS) foi definido como:

$$CS = \frac{\sigma_y}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (13)$$

CS : coeficiente de segurança (adimensional)

σ_y : tensão de escoamento do aço (Pa ou MPa)

$\sigma_{m\acute{a}x}$: maior tensão encontrada na estrutura (Pa ou MPa)

2.4 Determinação de Carregamentos em Estruturas

2.4.1 Forças Devido ao Vento segundo a NBR 6123

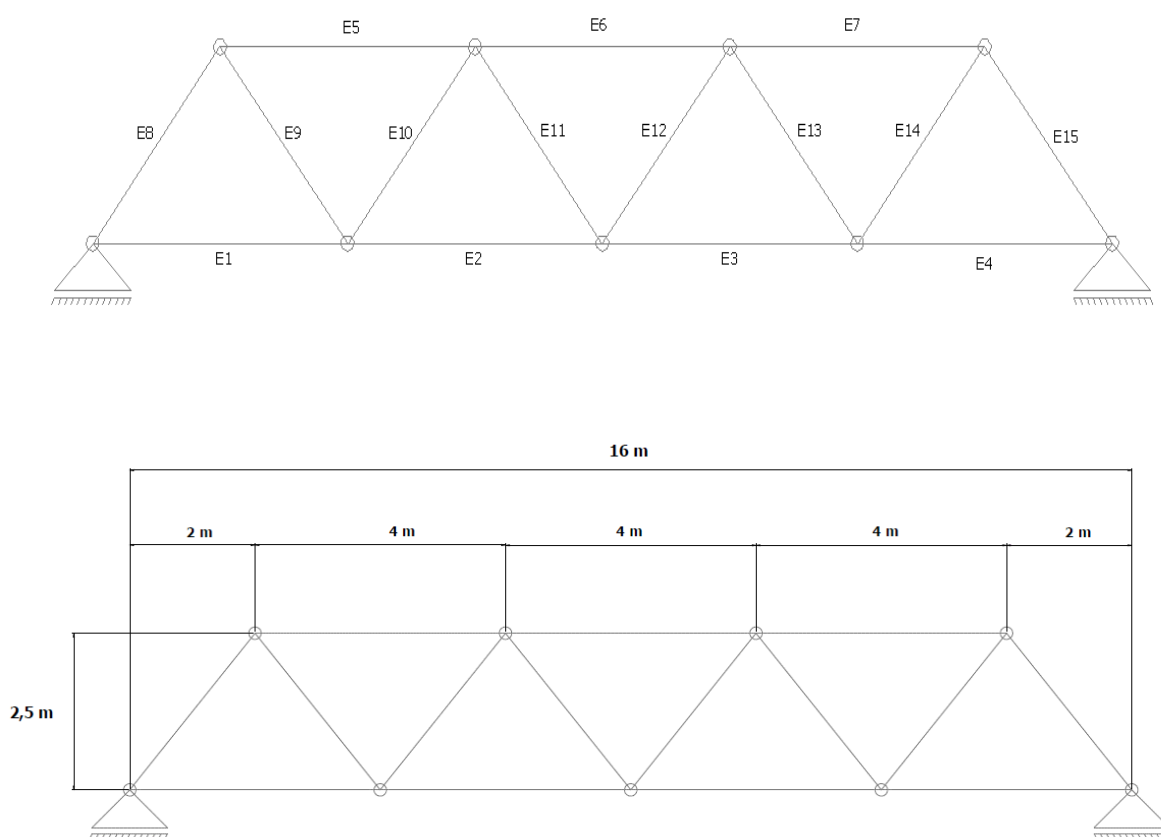
Além dos carregamentos estáticos diretos, as estruturas como pontes e coberturas que usam treliças, estão sujeitas a ações da natureza. Dentre elas, o vento é uma das mais significativa, e sua consideração no projeto é fundamental para garantir a segurança e a estabilidade da estrutura. No Brasil, o procedimento para a determinação das forças devidas ao vento em edificações é regulamentado pela norma ABNT 6123, (1988).

O objetivo desta norma é fixar as condições exigíveis na consideração da força do vento em projetos de edificações, sejam elas permanentes ou temporárias. A metodologia estabelecida pela norma transforma a ação dinâmica e complexa do vento em um conjunto de forças estáticas equivalentes que podem ser aplicadas no modelo estrutural para análise.

3 METODOLOGIA

A metodologia adotada consistiu na análise estática de uma treliça plana por meio de abordagens analítica e numérica, com o objetivo de validar os resultados obtidos. Inicialmente, a geometria da estrutura analisada é apresentada na Figura 2, que ilustra a configuração geral da treliça plana.

Figura 1 - Esquemático da treliça analisada



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A análise teórica foi realizada por meio do Método dos Nós, aplicando-se as equações de equilíbrio estático para a determinação das reações de apoio e dos esforços axiais em cada barra da treliça. Os carregamentos considerados incluíram cargas permanentes e ações do vento, definidas conforme a ABNT NBR 6123. As

propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais empregados na análise são apresentadas na Tabela 1, reunindo os parâmetros utilizados tanto no cálculo analítico quanto na modelagem numérica.

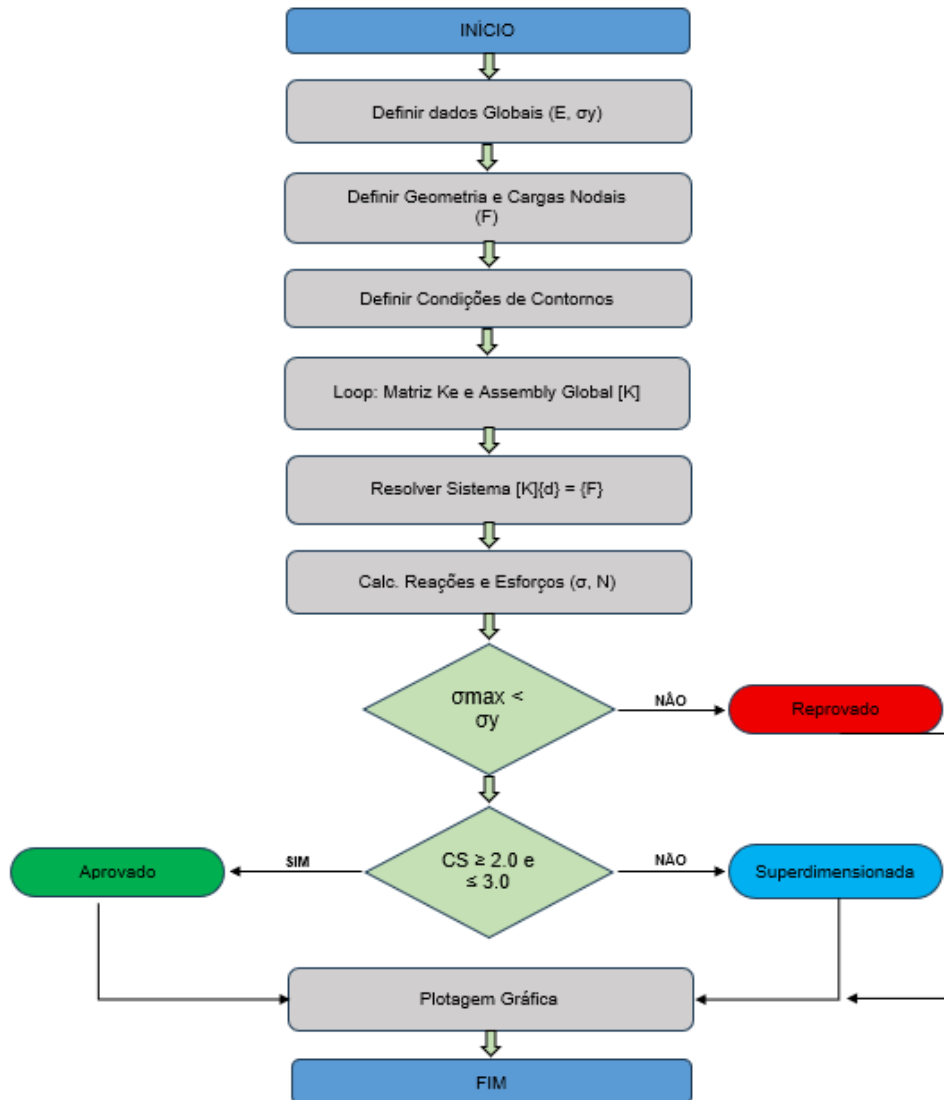
Tabela 1 - Propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais

Variável	Descrição	Unidade	Seção do Script
<i>nb_ele</i>	Nº de elementos	Adimensional	Entrada de Dados
<i>nb_nos</i>	Nº de nós	Adimensional	Entrada de Dados
<i>E</i>	Módulo de Elasticidade	N/m ² (Pa)	Entrada de Dados
<i>Fy</i>	Tensão escoamento (σ_y).	N/m ² (Pa)	Entrada de Dados
<i>A</i>	Área da seção transversal	m ²	Entrada de Dados
<i>Nos</i>	Matriz dos nós	m	Entrada de Dados
<i>mat_conect</i>	Matriz de conectividade	Adimensional	Entrada de Dados
<i>cond_cont</i>	Condições de contorno	Adimensional	Entrada de Dados
<i>F</i>	Vetor de forças nodais	N	Entrada de Dados
<i>K_global</i>	Matriz de rigidez global	N/m	Análise Estrutural
<i>Ke</i>	Matriz de rigidez local	N/m	Análise Estrutural
<i>c, s</i>	Cossenos e senos	Adimensional	Análise Estrutural
<i>gdl_livres</i>	Grau de liberdade	Adimensional	Análise Estrutural
<i>U</i>	Vetor de deslocamentos	m	Análise Estrutural
<i>R</i>	Reações de apoio	N	Pós-Processamento
<i>Sigma</i>	Tensões axiais	N/m ² (MPa)	Pós-Processamento
<i>esforços_axiais</i>	Esforços nos elementos.	N (kN)	Apresentação
<i>Max_tensao_abs</i>	Tensão máxima absoluta	N/m ² (MPa)	Apresentação
<i>CS</i>	Coefficiente de segurança	Adimensional	Apresentação
<i>max_desloc_y_metros</i>	Flecha máxima	m	Apresentação

Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

Na etapa numérica, o mesmo modelo estrutural foi analisado pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), por meio de um script desenvolvido no software MATLAB, baseado no Método da Rigidez Direta. O procedimento computacional adotado é apresentado de forma esquemática no fluxograma da Figura 3, que descreveu as etapas de entrada de dados, montagem da matriz de rigidez global, solução do sistema de equações, pós-processamento e verificação estrutural.

Figura 2 - Fluxograma do procedimento computacional



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Por fim, os resultados obtidos pelos métodos analítico e numérico foram comparados, permitindo avaliar a precisão do modelo computacional. Adicionalmente, foi realizado o dimensionamento estrutural das barras, com a verificação das tensões, coeficiente de segurança e deslocamentos máximos, complementado pela análise gráfica da configuração deformada da treliça.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esta seção apresenta os principais resultados da análise estática da treliça plana obtidos por meio da modelagem computacional em MATLAB via Método dos Elementos Finitos (MEF). A partir dos deslocamentos nodais, foram determinados os esforços axiais, tensões, reações de apoio e a flecha máxima, fornecendo a base para o dimensionamento estrutural e a verificação do Coeficiente de Segurança.

A Tabela 2 reúne os resultados axiais dos 15 elementos da treliça, incluindo ângulo de inclinação, esforço axial, tensão e o tipo de solicitação (tração ou compressão). A análise evidencia que os maiores esforços de compressão se concentram no banzo superior e nas diagonais de extremidade, enquanto os elementos do banzo inferior operam predominantemente à tração. Observa-se ainda a presença de barras com esforço nulo, indicando elementos inativos para o carregamento analisado, o que contribui para a compreensão global do comportamento estrutural da treliça.

Tabela 2 - Resultados de esforços (externos e internos) de cada emento

Elem.	Nós Conectados	Ângulo (Graus)	Tensão (MPa)	Esforços (KN)	Tipo
01	1 > 2	0°	36.590	16.429	Tração (T)
02	2 > 3	0°	85.377	38.334	Tração (T)
03	3 > 4	0°	85.377	38.334	Tração (T)
04	4 > 5	0°	36.590	16.429	Tração (T)
05	6 > 7	0°	-60.983	-27.382	Compressão (C)
06	7 > 8	0°	-85.377	-38.334	Compressão (C)
07	8 > 9	0°	-60.983	-27.382	Compressão (C)
08	1 > 6	51.34°	-58.573	-26.299	Compressão (C)
09	2 > 6	128.66°	39.048	17.533	Tração (T)
10	2 > 7	51.34°	-39.048	-17.533	Compressão (C)
11	3 > 7	128.66°	0.000	0.000	Tração (T)
12	3 > 8	51.34°	0.000	0.000	Tração (T)
13	4 > 8	128.66°	-39.048	-17.533	Compressão (C)
14	4 > 9	51.34°	39.048	17.533	Tração (T)
15	5 > 9	128.66°	-58.573	-26.299	Compressão (C)

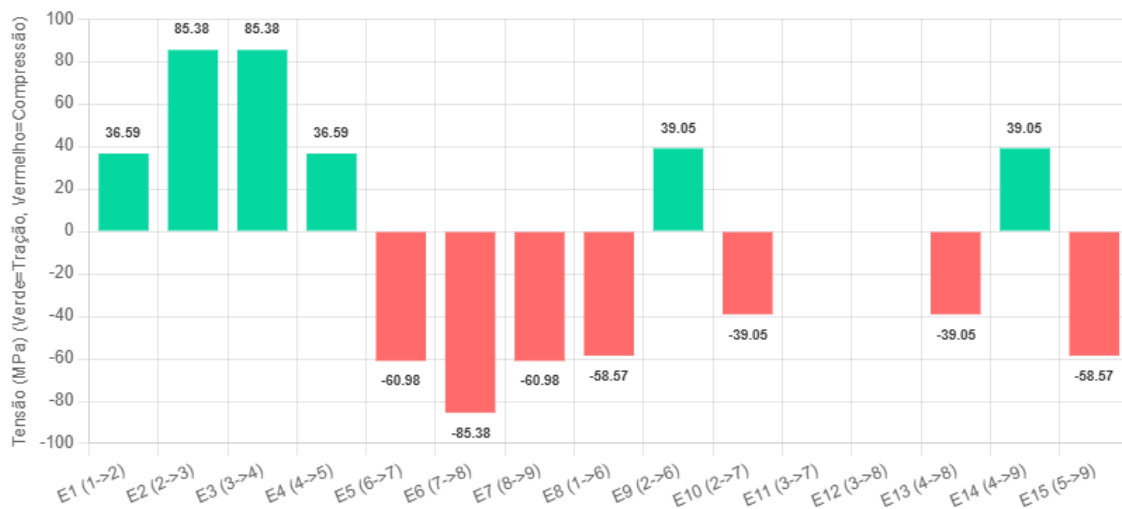
Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

A Figura 4 apresenta a distribuição das tensões normais nos quinze elementos da treliça, utilizando cores para indicar tração (verde) e compressão (vermelho). Os resultados mostram um comportamento coerente com o esperado para uma treliça biapoiada sob carregamento vertical, com tração predominante no banzo inferior e em algumas diagonais, e compressão no banzo superior e nas diagonais de extremidade. Destacam-se os elementos centrais do banzo inferior, que atingem a maior tensão de tração, enquanto o elemento central do banzo superior apresenta a maior solicitação à compressão, ambas com magnitudes simétricas.

Adicionalmente, observa-se que os elementos verticais E11 e E12 apresentaram tensão nula, caracterizando-se como estaticamente inativos para o carregamento considerado e atuando apenas no travamento geométrico da estrutura. A comparação entre a tensão máxima absoluta obtida (85,38 MPa) e a tensão de

escoamento do material (250 MPa) confirma que todos os elementos operam com ampla margem de segurança no regime elástico, sem risco imediato de falha por escoamento.

Figura 3 - Distribuição das tensões nos elementos da treliça



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

A Tabela 3 apresenta a comparação entre os resultados obtidos pelos métodos analítico e computacional, sendo possível observar, entre os dados apresentados, as reações nos nós de apoio. Esses valores evidenciam a consistência entre as abordagens e confirmam o correto equilíbrio global da estrutura.

Tabela 3 - Resultados comparativos (Analítico x Numérico).

Elem.	Nós Conectados	Ângulo (Graus)	Esforços Numérico (KN)	Esforços Cal. Analítico (KN)	Tipo
01	1 > 2	0°	16.429	16,04	Tração (T)
02	2 > 3	0°	38.334	37,42	Tração (T)
03	3 > 4	0°	38.334	37,42 - S	Tração (T)
04	4 > 5	0°	16.429	16,04 - S	Tração (T)
05	6 > 7	0°	-27.382	-26,74	Compressão (C)
06	7 > 8	0°	-38.334	-37,44	Compressão (C)
07	8 > 9	0°	-27.382	-26,74 - S	Compressão (C)
08	1 > 6	51.34°	-26.299	25,68	Compressão (C)
09	2 > 6	128.66°	17.533	17,12	Tração (T)
10	2 > 7	51.34°	-17.533	17,12	Compressão (C)
11	3 > 7	128.66°	0.000	0,00	-
12	3 > 8	51.34°	0.000	0,00	-
13	4 > 8	128.66°	-17.533	17,12 - S	Compressão (C)
14	4 > 9	51.34°	17.533	17,12 - S	Tração (T)
15	5 > 9	128.66°	-26.299	25,68 - S	Compressão (C)

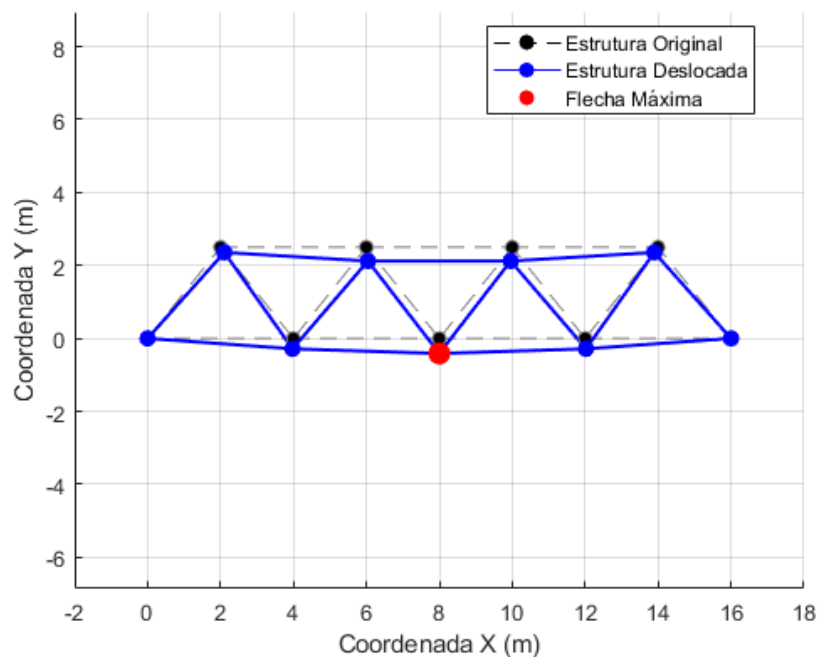
Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2025).

Para quantificar a precisão do modelo, observa-se, a partir da análise da Tabela 3, que a diferença percentual absoluta entre os resultados obtidos pelos métodos manual e computacional permanece inferior a 2,5%, valor plenamente aceitável em análises de engenharia. As pequenas divergências são atribuídas principalmente aos arredondamentos inerentes ao cálculo manual sequencial, enquanto o MATLAB resolve o sistema matricial com maior precisão numérica. Destaca-se ainda que os elementos 11 e 12 não apresentam diferença percentual, uma vez que possuem esforço nulo em ambas as metodologias.

A Figura 5 apresenta a representação dos deslocamentos nodais da treliça, permitindo a compreensão mais visual do comportamento estrutural sob carregamento. A geometria indeformada é utilizada como referência e comparada à configuração deformada, com os deslocamentos ampliados para facilitar a

visualização. A análise evidencia um comportamento simétrico e coerente com o esperado para uma treliça biapoiada, com a flecha máxima localizada no centro do vão inferior, confirmando a consistência do modelo numérico e a adequada rigidez global da estrutura, sem indícios de instabilidade.

Figura 4 - Deformação estrutural



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

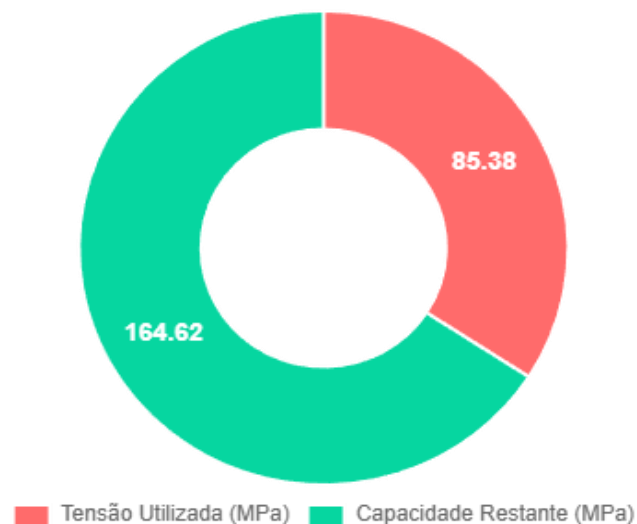
O Método dos Nós mostrou-se essencial para a compreensão dos princípios de equilíbrio estático e para a validação/comparação dos resultados computacionais; entretanto, apresenta limitações significativas quando aplicado a estruturas mais complexas, devido à baixa escalabilidade, ao elevado número de graus de liberdade e à restrição dos resultados principalmente às forças internas e reações de apoio.

Em contrapartida, a abordagem numérica por Elementos Finitos implementada em MATLAB supera essas limitações, destacando-se pela eficiência e rapidez na solução de sistemas complexos, maior precisão e confiabilidade na resolução do equilíbrio global, além de fornecer resultados mais completos, como deslocamentos, deformações, tensões e coeficiente de segurança. Adicionalmente, a flexibilidade do

modelo computacional permite a fácil alteração de parâmetros geométricos, propriedades dos materiais e carregamentos, tornando-o uma ferramenta adequada para análise, dimensionamento e otimização estrutural.

Ao fornecer o campo completo de tensões e a deformação máxima (flecha), o MEF possibilita ao engenheiro uma avaliação criteriosa do comportamento estrutural, assegurando que a estrutura opere dentro de um Coeficiente de Segurança (CS) adequado. A verificação da integridade estrutural é sintetizada na Figura 6, na qual o gráfico de rosca indica que a tensão máxima atuante (85,38 MPa) corresponde a apenas 34,15% da capacidade elástica de um aço 1020 (250 MPa) por exemplo, restando uma margem de segurança de 65,85%. O Coeficiente de Segurança calculado, igual a 2,93, encontra-se dentro da faixa recomendada para estruturas metálicas leves, evidenciando que o projeto é seguro e, ao mesmo tempo, eficiente quanto ao uso do material, sem superdimensionamento excessivo.

Figura 5 - Análise de capacidade do material e Coeficiente de Segurança



Fonte: Elaborado pelo autor (2025)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho demonstrou a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise estática de uma treliça plana, com foco na determinação dos esforços internos, deslocamentos nodais e reações de apoio. A metodologia adotada, baseada inicialmente na análise teórica pelo Método dos Nós e, posteriormente, na modelagem computacional via Método da Rigidez Direta implementada em MATLAB, permitiu uma comparação consistente entre abordagens analíticas clássicas e numéricas.

Os resultados obtidos evidenciaram excelente concordância entre os esforços axiais calculados manualmente e aqueles fornecidos pela simulação computacional, validando o modelo numérico desenvolvido e confirmando a confiabilidade do MEF para este tipo de análise estrutural. Além disso, a abordagem computacional mostrou-se superior em termos de eficiência e abrangência, uma vez que possibilitou a obtenção direta de grandezas como deslocamentos nodais e coeficiente de segurança, cuja determinação por métodos manuais é trabalhosa e suscetível a erros, especialmente em estruturas com maior número de elementos.

Dessa forma, conclui-se que o MEF, quando implementado em ambiente computacional como o MATLAB, constitui uma ferramenta robusta e precisa para a análise estrutural de treliças, contribuindo para o dimensionamento seguro, a otimização de projetos e a redução de custos por evitar o superdimensionamento. Como perspectivas para trabalhos futuros, recomenda-se a ampliação do script desenvolvido para análises tridimensionais, dinâmicas ou não lineares, bem como a integração com rotinas de otimização para seleção automática de seções estruturais mais econômicas, mantendo os critérios de resistência e rigidez.

REFERÊNCIAS

ABNT. NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 1988.

ABNT. NBR 7190: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro: ABNT, 1997.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática. 9. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2010.

CARDOSO, L. H. G.; COSTA, M. H. O. Modelagem Numérica de Treliça Plana para Análise Linear Estática por Elementos Finitos. In: Engenharia na Prática: Construção e Inovação – Vol. 4. Rio de Janeiro: Editora Epitaya, 2022.

CUNHA, G. C. S. et al. O Método dos Elementos Finitos em Treliças Planas na Disciplina de Mecânica Computacional. In: XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE 2007. Manaus: UEA, 2007.

HIBBELER, R.c.. ESTÁTICA: MECÂNICA PARA ENGENHARIA. 10. ed. SÃO PAULO: Pearson Prentice Hall, 2005.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. Mecânica para engenharia: estática. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

RADE, D. A. Método dos elementos finitos aplicados à engenharia mecânica. Uberlândia. Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

SANTOS, Kátia Maier dos. Apostila de MATLAB. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2017.

VIERO, Edison Humberto. Isostático passo a passo: sistemas estruturais em engenharia e arquitetura. 3. ed. Caxias do Sul: EDUCS, 2011.



Esta obra está licenciada com Licença Creative Commons Atribuição-Não Comercial 4.0 Internacional.
[Recebido/Received: Abril 30, 2023; Aceito/Accepted: Agosto 29, 2023]