

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA

Camila Fogaça de Oliveira¹

Katielly Tavares dos Santos²

RESUMO

No desenvolvimento das atividades que visam desenvolver o conhecimento tecnológico, destacamos atividades de modelagem matemática para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos. Este trabalho apresenta o resultado de duas atividades de modelagem matemática na educação matemática, relacionando com os conceitos de física e processos de fabricação.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Educação Tecnológica. Atividade Interdisciplinar.

MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES IN THE FIELD OF TECHNOLOGICAL EDUCATION

ABSTRACT

In the development of activities aimed at developing the technological knowledge, we emphasize mathematical modeling activities to facilitate the understanding of the concepts involved. This work presents the results of two activities of mathematical modeling in mathematics education, relating to the concepts of physics and manufacturing processes.

Key-words: Mathematical Modeling. Technological Education. Interdisciplinary Activity.

¹ Faculdade de Tecnologia do Senai Londrina. e-mail: camila.fogaça@sistemafiep.org.br

² Universidade Norte do Paraná Unopar. E-mail: katielly.souza@kroton.com.br

1. INTRODUÇÃO

A educação profissional e tecnológica vislumbra do conhecimento de técnicas e ao ato de fazer, mas com a apreensão do conhecimento tecnológico, considerando-se o mercado de trabalho. Nesse caso, visa “formar profissionais capazes de formular e resolver problemas, modelar situações e analisar de forma crítica os resultados obtidos” (FERRUZZI, 2003, p. 7).

Tendo em vista estes objetivos, atividades de modelagem matemática podem auxiliar na aprendizagem de conceitos em sala de aula, com a finalidade de construir modelos matemáticos já conhecidos na literatura e que utilizam conceitos relativos aos cursos de tecnologia.

Neste trabalho apresentamos a modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da matemática. As atividades abordadas se relacionam a conteúdos de matemática básica e de disciplinas de Física e Processos de Fabricação dos cursos superiores de Tecnologia em Manutenção Industrial e Fabricação Mecânica da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina.

A primeira delas envolveu a construção de um robô lançador para o estudo de lançamento de projéteis e a segunda atividade envolveu conceitos de velocidade de corte na usinagem por torneamento convencional de uma peça. A seguir detalhamos as atividades.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

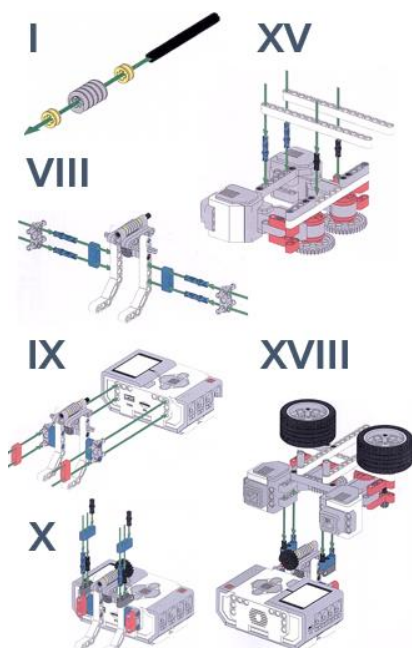
2.1. Atividade 1: Análise do movimento de um projétil

Na educação tecnológica recursos do tipo *Lego Education* são utilizados para incentivar a iniciação tecnológica. Neste caso, é possível explorar conteúdos matemáticos e físicos expandindo a utilização desses recursos.

Foi construído um robô lançador com recursos *Lego Education* (Figura 1) e utilizado o software *Tracker* (Figura 2) para a análise da trajetória do projétil. A trajetória desse objeto com velocidade inicial v_0 apresenta o formato de uma parábola com concavidade

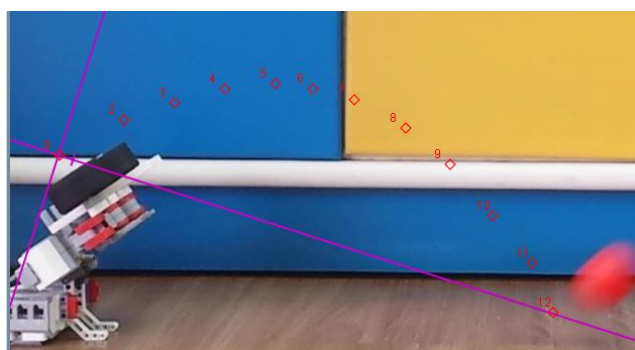
voltada para baixo e seu movimento é denominado de lançamento oblíquo. Nesse caso, o projétil apresenta ponto de máximo.

Figura 1: Robô lançador



Fonte: Dos autores.

Figura 2: Trajetória através do software



Fonte: Dos autores.

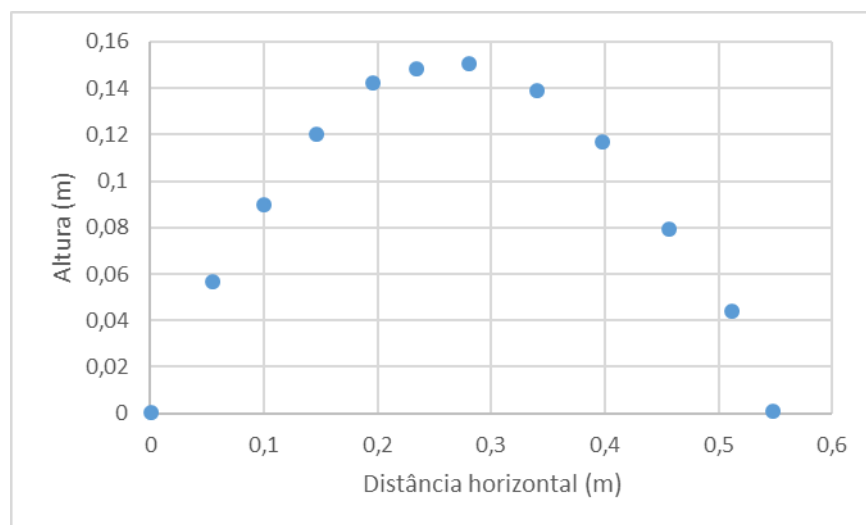
O software *Tracker* apresentou dados do tempo da trajetória, sua distância horizontal e altura correspondentes, conforme indica Tabela 1. A partir da tabela, foi possível construir a tendência dos dados com vistas a obter a equação da trajetória do projétil (Gráfico 1).

Tabela 1: Dados da trajetória obtidos através do software

Tempo (s)	Distância horizontal (m)	Altura (m)
0,000	0,00114	0,00037
0,067	0,05455	0,05649
0,100	0,1001	0,08984
0,133	0,1465	0,1204
0,167	0,1957	0,1424
0,200	0,2343	0,1485
0,234	0,2804	0,1508
0,267	0,3405	0,1389
0,300	0,3976	0,1166
0,334	0,4564	0,07924
0,367	0,5115	0,04381
0,401	0,5484	0,00102

Fonte: Dos autores.

Gráfico 1: Equação da trajetória do projétil



Fonte: Dos autores.

A trajetória do projétil corresponde a uma função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx + c$ (1), em que x representa a distância horizontal (metros) e y representa a altura atingida pelo projétil (metros).

Considerando que a altura final é a mesma altura de lançamento¹, ou seja, $c = 0$ e levando em consideração os seguintes pontos $y(0,2804) = 0,1508$ e $y(0,5484) = 0$, obtemos o seguinte sistema linear, por meio da substituição em (1):

$$\begin{cases} y(0,2804) = a \cdot 0,2804^2 + b \cdot 0,2804 = 0,1508 \\ y(0,5484) = a \cdot 0,5484^2 + b \cdot 0,5484 = 0 \end{cases}$$

Sabendo que $a = -2,0067$ e $b = 1,1003$ obtemos o seguinte ajuste para o conjunto de dados:

$$y = -2,0067x^2 + 1,1003x. \quad (2)$$

Pelo Teorema de Fermat temos que se uma função possui valores máximo ou mínimo locais em um ponto x_m interior de seu domínio e sua derivada existir, então $f'(x_m) = 0$. Sendo assim, o próprio fenômeno movimento de um projétil nos indica que temos um ponto de máximo no domínio da função.

¹ Realizou-se essa simplificação com o intuito de complementar nosso estudo com conceitos físicos.

A derivada de (2) nos fornece $y' = -4,0134x_m + 1,1003$ e igualando a zero temos que a altura máxima do projétil de $y_m = 0,1508 \text{ metros}$ é adquirida a uma distância horizontal de $x_m = 0,2742 \text{ metros}$.

O estudo do movimento de um projétil é abordado especialmente, em cursos superiores, na disciplina de Física (mecânica). Neste caso, visamos complementar nossa problemática, o Quadro 1 apresenta uma abordagem do livro didático 'Fundamentos de Física', vol. 1 - mecânica de David Halliday e Robert Resnick publicado em 2008.

Quadro 1: Conceitos físicos para lançamentos de projéteis

Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. A componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima. Inicialmente ela está dirigida para cima e seu módulo diminui continuamente até se anular, o que determina a altura máxima da trajetória (Fig. 4-10). Em seguida, a componente vertical da velocidade muda de sentido e seu módulo passa a aumentar com o tempo.

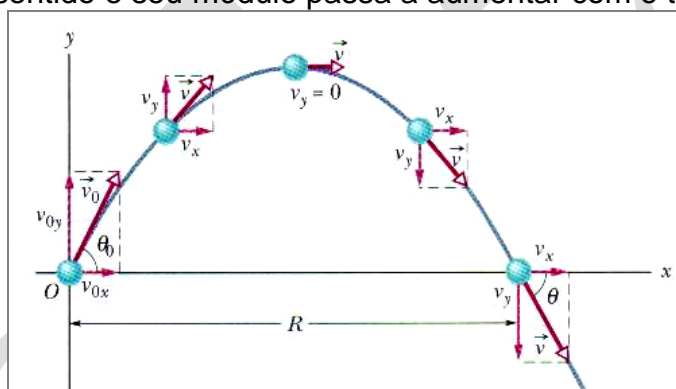


Fig. 4-10 Trajetória de um projétil que é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com uma velocidade inicial \mathbf{v}_0 . São mostradas a velocidade inicial e as velocidades em vários pontos ao longo da trajetória, juntamente com suas componentes. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, mas a componente vertical muda continuamente. O *alcance* R é a distância horizontal percorrida pelo projétil quando retorna à altura do lançamento.

Fonte: Halliday e Resnick (2008, p. 72).

Halliday e Resnick (2008) apresentam a equação da trajetória e alcance horizontal por meio de modelos já estruturados, visando indicar aplicações destes conceitos. Segundo os autores, a trajetória de um projétil é determinada pela fórmula (3) definida por

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \quad (\text{Quadro 2}).$$

Quadro 2: Equação da trajetória

Equação da Trajetória

Podemos obter a equação do caminho percorrido pelo projétil (sua *trajetória*), obtemos após algumas manipulações algébricas,

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cdot \cos\theta_0)^2} \quad (3)$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-10. Como g , θ_0 e v_0 são constantes, a equação (1) é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. Como esta é a equação de uma parábola, a trajetória é *parabólica*.

Fonte: Halliday e Resnick (2008, p. 72).

Sendo assim, a partir de (2) é possível determinar o ângulo de lançamento do projétil e sua velocidade inicial. Igualando (1) e (2), obtemos $\tan\theta_0 = 1,1003$ e $\frac{g}{2(v_0 \cdot \cos\theta_0)^2} = 2,0067$, ou seja, $\theta_0 \cong 47,73^\circ$ e $v_0 \cong 2,32 \text{ m/s}$.

O alcance horizontal do projétil pode ser determinado considerando que $R = 2x_m$. Por outro lado, Halliday e Resnick (2008) indica no quadro 3 que o *alcance horizontal* de um projétil é determinado pela fórmula $R = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta_0}{g}$ (4), assim, $R \cong 0,55 \text{ metros}$.

Quadro 3: Alcance horizontal de um projétil

Alcance Horizontal

O *alcance horizontal* R de um projétil, como mostra a Fig. 4-10, é a distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar à sua altura inicial (altura de lançamento). Para determinar o alcance R , fazemos:

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta_0}{g} \quad (4)$$

Atenção: Esta equação não fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que R na equação 2 atinge o valor máximo para $\sin 2\theta_0 = 1$, que corresponde a $2\theta_0 = 90^\circ$ ou $\theta_0 = 45^\circ$.

Fonte: Halliday e Resnick (2008, p. 73)

É possível inferir que no caso do livro didático abordado, os autores já apresentam modelos matemáticos estruturados para a análise do movimento de um projétil, ou seja, seu estudo trata de aplicações de conceitos físicos. Foi possível verificar que a abordagem desses conceitos enriquecem e complementam o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula.

2.2. Atividade 2: velocidade de corte na usinagem por torneamento convencional de uma peça

Para que uma ferramenta corte um material, é necessário que um se movimente em relação ao outro a uma velocidade adequada.

Na indústria mecânica, por exemplo, as fresadoras, os tornos e outras máquinas operatrizes, produzem peças por meio de um processo denominado usinagem (Figura 3). A escolha de uma ou outra máquina depende das especificações técnicas exigidas da peça como o formato do produto (planas, curvas, cilíndricas, cônicas e outras), dimensões e acabamento especificados.

Figura 3: Diversos formatos de peça podem ser obtidos pelo processo de usinagem



Fonte: Dos autores.

Segundo Houaiss (2009), usinagem é o processo de fabricação que consiste em trabalhar uma peça bruta com máquinas operatrizes para lhe dar o formato final. Segundo a Senai (1998), o material removido da peça ou material bruto é denominado de cavaco, sendo constituído por lascas, pedaços ou fragmentos, caracterizando-se por uma forma geométrica irregular (excedente do ferro fundido, do aço, do alumínio ou outros materiais retirados de uma peça durante o processo de usinagem).

Os processos mecânicos de usinagem são normalizados e padronizados pela norma NBR 6175. O torneamento consiste de um “processo mecânico de usinagem destinado à obtenção de superfícies de revolução com auxílio de uma ou mais ferramentas monocortantes” (ABNT, 1971, p. 2).

Embora possua grande versatilidade, o torno convencional apresenta dificuldade em mudanças ou troca de ferramentas. Neste caso, não oferece grandes possibilidades de fabricação de peças em série, podendo executar operações que normalmente são feitas por outras máquinas, como a fresadora, a furadeira e a retificadora.

Diversas partes compõem o torno convencional, realizando operações de usinagem (ESTAMBASSE, GÓES, 2014; SENAI, 2007), conforme ilustra a Figura 4.

Cabeçote Móvel: desliza sobre o barramento do torno e serve como ponto de apoio em diversas operações de torneamento, especialmente em fixação de peças longas.

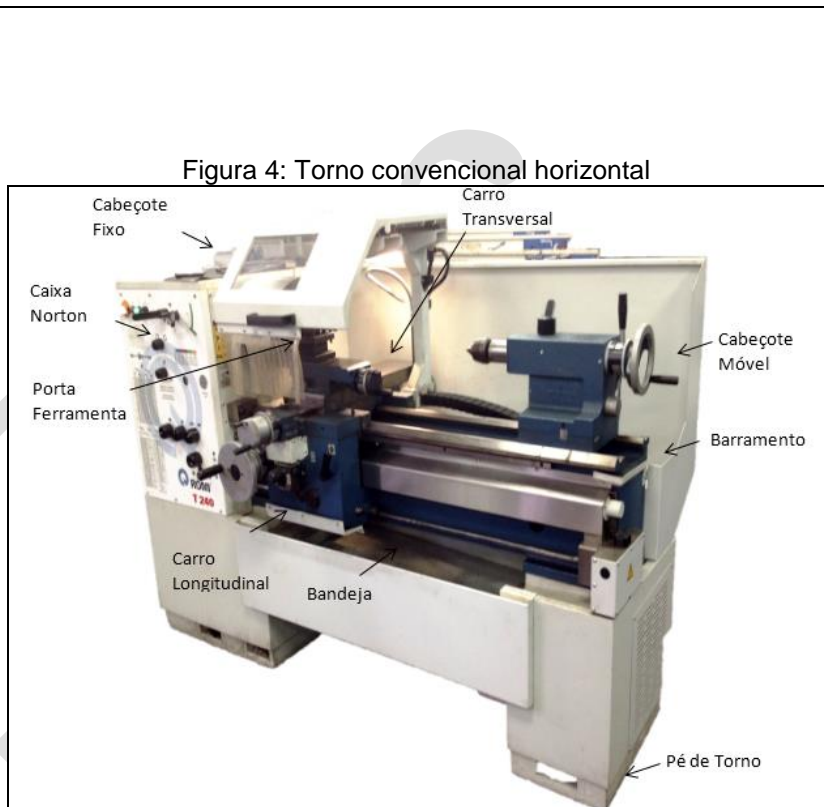
Carro Transversal: é responsável pelo movimento transversal da ferramenta e se desliza por meio de um movimento manual ou automático.

Barramento: forma a estrutura da máquina, fixando o cabeçote fixo e móvel e proporcionando movimento do carro transversal do torno e alguns acessórios.

Carro Longitudinal: se apoia sobre o barramento e serve de apoio aos outros carros.

Cabeçote Fixo: permite estabelecer o movimento de rotação do torno, fornecendo a frequência de rotação.

Porta Ferramenta: permite fixar a ferramenta de corte por meio de parafusos de aperto.



Fonte: Dos autores.

Essas partes constituintes do torno convencional são as responsáveis pelo desenvolvimento dos seguintes sistemas:

- Sistema de transmissão de movimento do eixo: motor, polia, engrenagens, redutores.
- Sistema de deslocamento da ferramenta e de movimentação da peça em diferentes velocidades: engrenagens, caixa de câmbio, inversores de marcha, fusos, vara etc.

- Sistema de fixação da ferramenta: torre, carro porta-ferramenta, carro transversal, carro principal ou longitudinal.
- Sistema de fixação da peça: placas e cabeçote móvel.
- Sistema de comandos dos movimentos e das velocidades: manivelas e alavancas.
- Sistema de frenagem (SENAI, 2007, p. 26)

O torneamento de uma peça pode ser cilíndrico (Figura 5). Neste caso, a peça gira em torno do eixo principal de rotação da máquina e a ferramenta se desloca simultaneamente segundo uma trajetória paralela com o referido eixo.

Figura 5: Torneamento cilíndrico externo

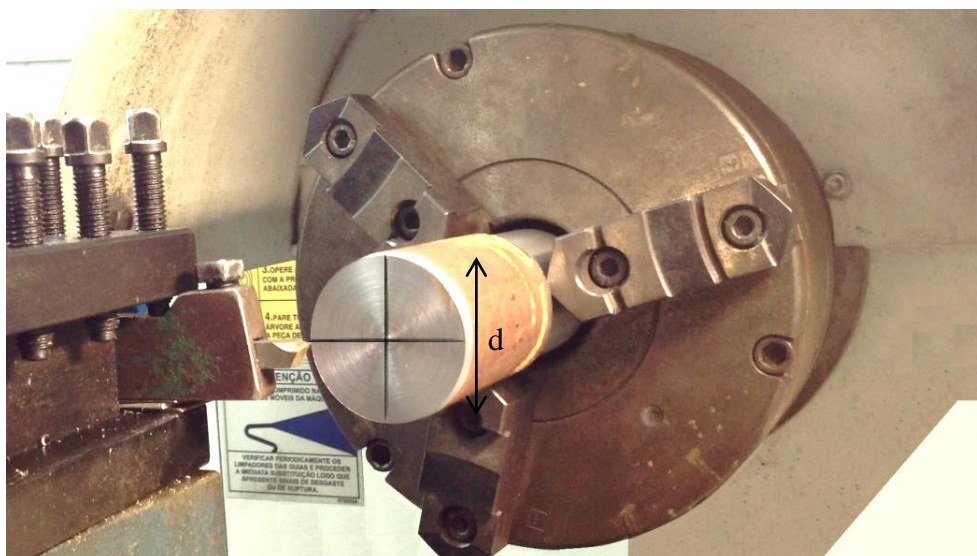


Fonte: Dos autores.

A velocidade do torneamento de uma peça pode ser muito rápida ou bem lenta. Segundo Fiesp (1995, p. 85), a velocidade de corte “depende de uma série de fatores, como tipo de material da ferramenta, tipo do material a ser usinado, tipo de operação a ser realizada, condições da refrigeração, condições da máquina, etc.”.

Por definição, essa velocidade de corte, corresponde a velocidade de rotação da peça. Em cada rotação da peça a ser torneada, o seu perímetro da base passa uma vez pela aresta cortante da ferramenta, conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6: Representação do movimento de rotação da peça



Fonte: Dos autores.

Para determinar o modelo matemático que descreve o movimento de rotação de uma peça a ser torneada são necessárias algumas suposições a respeito da situação-problema. A saber,

- ✓ A função que descreve a velocidade de corte é uma função de duas variáveis diretamente proporcional entre o deslocamento da ferramenta (ferramenta percorre uma circunferência completa) e o seu período de rotação;
- ✓ Em cada rotação o diâmetro será considerado fixo;
- ✓ O diâmetro da tabela 2 se refere ao diâmetro final da peça.

Considerando as variáveis: velocidade de corte (metros/minuto) (v_c), diâmetro do material (metros) (d), período de rotação (minuto) (T) e frequência de rotação (rpm) (n), podemos inferir que a velocidade de corte é uma grandeza numérica diretamente proporcional ao perímetro¹ que a ferramenta percorre uma circunferência completa e o seu período de rotação, ou seja,

$$v_c = \frac{\pi d}{T} . \quad (5)$$

Neste caso, dizemos que o movimento é denominado de *movimento circular uniforme*, pois sua trajetória é uma circunferência e o módulo de sua velocidade permanece constante no decorrer do tempo.

¹ Período é o tempo que a ferramenta leva para percorrer uma circunferência completa.

Em usinagem, como é necessário o cálculo da frequência de rotação da peça que está realizando o trabalho, utilizaremos a seguinte relação:

$$n = \frac{1}{T} . \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) obtemos:

$$v_c = \pi d n . \quad (7)$$

Como é padronizado para o diâmetro das peças a sua utilização em milímetros, de modo geral, materiais técnicos utilizam da transformação de unidades do modelo (7) de metros para milímetros:

$$v_c = \frac{\pi d n}{1000} , \quad (8)$$

onde v_c é a velocidade de corte (metros/minuto), d é o diâmetro do material (milímetros) e n é a frequência de rotação (rpm).

Visando facilitar cálculos matemáticos, muitos fabricantes informam por meio de tabelas, relações entre a velocidade de corte e o diâmetro de material, para a determinação da frequência de rotação ideal (Tabela 2).

Tabela 2: Frequência de rotação de uma peça (rpm)

v m/min	Diâmetro do material em milímetros											
	6	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120
6	318	191	96	64	48	38	32	27	24	21	19	16
9	477	287	144	96	72	57	48	41	36	32	29	24
12	636	382	191	127	96	76	64	54	48	42	38	32
15	794	477	238	159	119	96	80	68	60	53	48	40
19	1108	605	303	202	152	121	101	86	76	67	60	50
21	1114	669	335	223	168	134	112	95	84	74	67	56
24	1272	764	382	255	191	152	128	109	96	85	76	64
28	1483	892	446	297	223	178	149	127	112	99	89	75
30	1588	954	477	318	238	190	159	136	119	106	95	80
36	1908	1146	573	382	286	230	191	164	143	127	115	96
40	2120	1272	636	424	318	254	212	182	159	141	127	106
45	2382	1431	716	477	358	286	239	205	179	159	143	120
50	2650	1590	795	530	398	318	265	227	199	177	159	133
54	2860	1720	860	573	430	344	287	245	215	191	172	144
60	3176	1908	954	636	477	382	318	272	239	212	191	159
65	3440	1070	1035	690	518	414	345	296	259	230	207	173
72	4600	2292	1146	764	573	458	382	327	287	255	229	191
85	4475	2710	1355	903	679	542	452	386	339	301	271	226

Fonte: Senai (2007, p. 76).

Neste caso, é possível verificar que há estreita relação entre a Tabela 2 e o modelo matemático (8). Nesse sentido, é possível vislumbrar nessa primeira atividade que além de conteúdos matemáticos e de processos mecânicos de usinagem, também são acionados conceitos físicos, para a determinação do modelo já convencionado na literatura.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, mostramos que a modelagem matemática pode ser utilizada como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem da matemática. Técnica que também pode ser aplicada ao ensino de outras disciplinas.

As atividades desenvolvidas e apresentadas neste trabalho relacionam a matemática com a física e a matemática com processos de fabricação mecânica. As atividades foram desenvolvidas nos cursos superiores de Fabricação Mecânica e Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina.

Através do desenvolvimento das atividades verificamos que trabalhar com a modelagem matemática auxilia no desenvolvimento e aprendizagem dos alunos no âmbito tecnológico, motivando a busca por outros meios de aprendizagem e tornando possível o aluno ser protagonista de seu aprendizado.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS E TÉCNICAS. **Processos mecânicos de usinagem**: 6175. Rio de Janeiro, 1971.

ESTAMBASSE, E. C.; GÓES, R. P. **Torneiro Mecânico**. Curitiba: Editora do Livro Técnico, 2014.

FERRUZZI, E. C. **Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas)—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

FIESP. **Calculo Técnico**. São Paulo: Fundação Roberto Marinho, 1995.